107

NOM : Prénom : Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-ev. Exemples.

Autre sujet :

G groupe fini, V est un $\mathbb{C}$-ev, $\dim V = n$

I Représentations d'un groupe fini

[COL] ### 1 Définitions et premiers exemples

p235 **DEF1** Une représentation de G est un $\mathbb{C}$-ev V sur lequel G agit (à gauche) de manière linéaire. Une telle représentation est équivalente à la donnée d'un morphisme de groupes $\rho_V : G \to GL(V)$.

p239 **EX2** Le $\mathbb{C}$-ev V_G de base $(e_g, g \in G)$ muni de l'action $g \cdot e_h = e_{gh}$ est appelé représentation régulière de G.

p240 **DEF3** $u \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ est dit opérateur d'entrelacement entre les représentations V_1 et V_2 si u commute à l'action de G.
On note $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ le ss.ev formé par les opérateurs d'entrelacement.

p241 **EX4** l'opérateur de moyenne $M : \begin{array}{l} V \to V \\ v \mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g \cdot v \end{array}$ est un opérateur d'entrelacement.

p241 **DEF5** On dit que deux représentations V_1 et V_2 de G sont isomorphes s'il existe $u \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ bijectif. On note $V_1 \simeq V_2$.

[SER] p16 **Rq6** Lorsque ρ et ρ' sont données sous forme matricielle $g \mapsto R_g$ et $g \mapsto R'_g$, ρ et ρ' sont isomorphes ssi il existe $T \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall g \in G,\ T \cdot R_g = R'_g \cdot T$

EX7 $\rho_1 : \begin{array}{l} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to GL_2(\mathbb{C}) \\ 1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$ et $\rho_2 : \begin{array}{l} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to GL_2(\mathbb{C}) \\ 1 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ sont isomorphes

2 Opérations sur les représentations

[COL] p242 **DEF8** Une sous-représentation de V est un sous espace vectoriel de V stable par action de G (G-stable).

p238 **DEF9** Soient V_1, V_2 deux représentations de G. On munit $V_1 \oplus V_2$ de l'action de groupe $(g, v_1 + v_2) \mapsto g \cdot v_1 + g \cdot v_2$.
Si $V_1 = \dots = V_m$, on note $\bigoplus_{i=1}^{m} V_i = mV_1$.

EX10 Si $\rho_0 : \begin{array}{l} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ 1 \mapsto -1 \end{array}$ on a $\rho_1 = 1 \oplus \rho_0$.

DEF11 Soient V_1, V_2 deux représentations de G. On munit $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ de l'action de groupes $g \cdot u : v \mapsto g \cdot (u(g^{-1} \cdot v))$. p239

PROP12 $\forall g \in G, \forall u \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, p240
$\rho_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)}(g)(u) = \rho_{V_2}(g) \circ u \circ \rho_{V_1}(g)^{-1}$.

DEF13 Soient V_1, V_2 deux représentations de G. p259
On munit $V_1 \otimes V_2$ de l'action de groupes $g \cdot (v_1 \otimes v_2) = (g \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_2)$.

DEF/PROP14 On définit p259
$\mathrm{Sym}^2 V = \{x y = \frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x),\ (x,y) \in V^2\}$ et
$\Lambda^2 V = \{x \wedge y = \frac{1}{2}(x \otimes y - y \otimes x),\ (x,y) \in V^2\}$.
On a $V \otimes V = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V$.

DEF/PROP15 $\mathrm{Sym}^2 V$ et $\Lambda^2 V$ sont G-stables et définissent donc des représentations de G, appelées respectivement "carré symétrique" et "carré alterné" de V. [SER] p21

3 Représentations irréductibles

DEF16 V est dite irréductible si $V \neq \{0\}$ et si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V. p19

EX17 Soit ρ une représentation irréductible de G. [COL]
Soit η une représentation de degré 1. p243
Alors $\eta \otimes \rho$ est irréductible.

TH18 Il existe sur V un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariant sous l'action de G. p243

TH19 [Maschke] p244
Toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles.

TH20 [lemme de Schur] p244
Soient V_1, V_2 deux représentations irréductibles de G.
- Si $V_1 \not\simeq V_2$ alors $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \{0\}$
- Si $V_1 = V_2$ alors $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \{\lambda \mathrm{Id},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$.

COR21 Si $V_1 \simeq V_2$ alors $\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 1$. p245

107

NOM : PRENOM :

Sujet choisi :

Autre sujet :

p245 PROP22 Soient V_1 et V_2 deux représentations irréductibles de G.

- Si $V_1 \not\simeq V_2$ alors $\forall u \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$,
$$M(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot u = 0$$
- Si $V_1 = V_2 = V$ et $u \in \mathrm{Hom}(V, V)$ alors $M(u)$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{n} \mathrm{Tr}(u)$.

II Théorie des caractères

[SER]

1 Définition et premières propriétés

p23 DEF23 Soit $\rho_V : G \to GL(V)$ une représentation de G. On définit son caractère χ_V par
$$\forall g \in G,\ \chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho_V(g)).$$

Rq24 Comme $\forall g \in G$, $\rho_V(g)$ est diagonalisable, $\chi_V(g)$ est la somme des valeurs propres de $\rho_V(g)$.

p23 PROP25 Soit V une représentation de G.

- $\chi_V(1) = n$
- $\forall g \in G,\ \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$
- $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ est une fonction centrale ($\chi_V(gh) = \chi_V(hg)$)

[COL] p239 EX26

- $\chi_{V_G}(1) = |G|$
- $\forall g \neq 1,\ \chi_{V_G}(g) = 0$

p240 PROP27 $\forall g \in G,\ \chi_{\mathrm{Hom}(V_1, V_2)}(g) = \overline{\chi_{V_1}(g)}\, \chi_{V_2}(g)$

p240 COR28 $\forall g \in G,\ \chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)}$.

[SER] p24 PROP29 Soient V_1 et V_2 deux représentations de G.

- $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$
- $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \chi_{V_2}$

p24 COR30 Soit V une représentation de G.

- $\forall g \in G,\ \chi_{\mathrm{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)\right)$
- $\forall g \in G,\ \chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right)$.

p17,25 EX31 $G = S_n$, $(e_1 \dots e_n)$ base de V. On munit V de l'action $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$. Cette action définit la représentation de permutation de S_n.
$$\forall \sigma \in S_n,\ \chi_V(\sigma) = |\mathrm{fix}(\sigma)|.$$

2 Orthogonalité des caractères

DEF32 On munit le $\mathbb{C}$-ev $R_{\mathbb{C}}(G)$ des fonctions centrales sur G du produit scalaire hermitien [COL] p246
$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi(g)}\, \psi(g).$$

TH33 [Frobenius] p246 DEV

Les caractères irréductibles forment une base orthonormale de $R_{\mathbb{C}}(G)$.

COR34 Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G : $|\mathrm{Irr}(G)| = |\mathrm{Conj}(G)|$. p247

COR35 Si $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ est une décomposition de V en somme de représentations irréductibles et si W est irréductible alors le nombre m_W de W_i isomorphes à W est $\langle \chi_W, \chi_V \rangle$. p248

En particulier, $V \simeq \bigoplus_{W \in \mathrm{Irr}(G)} \langle \chi_W, \chi_V \rangle W$.

COR36 $V_1 \simeq V_2 \iff \chi_{V_1} = \chi_{V_2}$. p248

COR37 $V \in \mathrm{Irr}(G) \iff \langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ p248

3 Tables de caractères

PROP38 p249

- Si $W \in \mathrm{Irr}(G)$ alors W apparaît dans la décomposition de la représentation régulière avec la multiplicité $\dim W$.
- $\sum_{W \in \mathrm{Irr}(G)} (\dim W)^2 = |G|$ [formule de Burnside]
- Si $g \neq 1$ alors $\sum_{W \in \mathrm{Irr}(G)} (\dim W) \chi_W(g) = 0$.

PROP39 Soit $g \in G$ et $c(g) \subset G$ sa classe de conjugaison. [SER] p32

- $\sum_{W \in \mathrm{Irr}(G)} |\chi_W(g)|^2 = \frac{|G|}{|c(g)|}$
- si $h \notin c(g)$ alors $\sum_{W \in \mathrm{Irr}(G)} \overline{\chi_W(g)}\, \chi_W(h) = 0$.

DEF40 La table de caractères de G est un tableau de taille $|\mathrm{Conj}(G)|$ dont le coefficient à l'intersection du caractère χ et de la colonne de la classe de conjugaison C est $\chi(C)$. [COL] p252

107

NOM :   PRENOM :

Sujet choisi :

[SER] Autre sujet :

p33 **EX41** table de S_3

DEV p58 **EX42** table de S_4

p57 **EX43** table de A_4

p52 **EX44** table de D_8

[PEY] p230 **PROP45** Soit V une représentation de G.
$\mathrm{Ker}\,\chi_W = \{g \in G \,/\, \chi_V(g) = \chi_V(1)\}$ est un sous-groupe distingué de G. On le nomme noyau de la représentation.

p231 **PROP46** Les sous-groupes distingués de G sont exactement les $\bigcap_{W \in I} (\mathrm{Ker}\,\chi_W)$, $I \subset \mathrm{Irr}(G)$.

p232 **COR47**
G est simple ssi $\forall W \in \mathrm{Irr}(G), \forall g \neq 1, \chi_W(g) \neq \chi_W(1)$.

[COL] **III Cas des groupes abéliens**

p249 **TH48** G est abélien ssi toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

p238 **DEF49** Une représentation de degré 1 coïncide avec son caractère et est appelée caractère linéaire.
On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères linéaires de G.

p249 **Rq 50** G est abélien $\Leftrightarrow \mathrm{Irr}(G) = \widehat{G}$.

p249 **PROP51** Si G est abélien alors toute fonction $f : G \to \mathbb{C}$ est combinaison linéaire de caractères linéaires.

à partir d'ici, G est supposé abélien

p250 **DEF52** Soit $\phi : G \to \mathbb{C}$.
La transformée de Fourier $\widehat{\phi}$ de ϕ est définie par
$\forall \chi \in \widehat{G},\ \widehat{\phi}(\chi) = \langle \phi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)}\, \phi(g)$.

p250 **PROP53** [formule d'inversion de Fourier]
$$\phi = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{\phi}(\chi)\chi$$

Rq54 $\widehat{G}$ est un groupe abélien donc on peut définir $\widehat{\widehat{G}} = \mathrm{Irr}(\widehat{G})$. p250

PROP55 $\iota : G \to \widehat{\widehat{G}}$, $g \mapsto (\iota(g) : \chi \mapsto \chi(g))$ est un isomorphisme de groupes. p250

LEM56 On note N le maximum des ordres des éléments de G (= l'exposant de G). Alors $\forall g \in G$, $g^N = 1$. p251

LEM57 G et $\widehat{G}$ ont le même exposant. p251

TH58 [structure des groupes abéliens finis] p252
Si G est un groupe fini abélien alors il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ et des uniques $N_1, \dots, N_r > 1$ tels que
- N_1 est l'exposant de G
- $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $N_{i+1} | N_i$ DEV
- $G \simeq \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$.

Refs

[COL] COLMEZ, Éléments d'analyse et d'algèbre

[SER] SERRE, Représentations linéaires des groupes finis

[PEY] PEYRE, L'algèbre discrète de la transformée de Fourier.

107

NOM :

PRENOM :

Sujet choisi :

Autre sujet :

S_3	1	(12)	(123)
1	1	1	1
ε	1	-1	1
χ_W	2	0	-1

S_4	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ	3	1	0	-1	-1
$\varepsilon\chi$	3	-1	0	-1	1
η	2	0	-1	2	0

A_4	1	(123)	(132)	(12)(34)
1	1	1	1	1
χ	3	0	0	-1
η_1	1	j	j^2	1
η_2	1	j^2	j	1

D_8	1	r	r^2	s	sr
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
θ_1	1	-1	1	-1	1
θ_2	1	1	1	-1	-1
η	2	0	2	0	0